

Aplikovaná matematika – aproximace funkce

Předmět (volitelný):	Aplikovaná matematika
Téma hodiny:	Aproximace funkcí
Věk žáků:	3. ročník gymnázia
Časová náročnost:	1- 2 vyučovací hodiny
Podmínky výuky:	Výuka probíhá v běžné učebně, k dispozici je interaktivní tabule nebo dataprojektor. Žáci využívají možnosti mobilní učebny IVT - mají k dispozici vhodný SW: Geogebra, tabulkový kalkulátor MS Excel. V hodině se střídá výklad, samostatná práce žáka, práce ve dvojicích, skupinová práce žáků a společná diskuze nad problémem.

Detailní plán vyučovací hodiny:

1. Úvod (5 minut)

- **Motivace:**
 - Zahájit hodinu otázkou: „*Jak bychom mohli jednodušeji vypočítat hodnotu složité funkce v libovolném bodě, aniž bychom museli počítat přesně?*“
 - Vizualní ukázka: Na tabuli nebo projektoru zobrazit graf složité funkce (např. sinus, exponenciála) a jednoduché funkce (např. lineární, kvadratická). Zeptat se studentů, která z funkcí se jim zdá jednodušší pro výpočty.
- **Oznámení tématu:** „Dnes se budeme zabývat tím, jak můžeme složité funkce nahradit jednoduššími. Tomuto procesu říkáme **aproximace**.“
- **Cíl hodiny:** „Naším cílem je porozumět základním pojmům spojeným s aproximací funkcí a naučit se některé jednoduché metody aproximace.“

2. Hlavní část (25 minut)

- **Základní pojmy:**
 - **Aproximace:** Nahrazení složité funkce jednodušší funkcí.
 - **Chyba aproximace:** Rozdíl mezi hodnotou původní funkce a hodnotou přibližné funkce v daném bodě.
 - **Interval aproximace:** Úsek, na kterém chceme funkci aproximovat.
- **Metody aproximace:**
 - **Lineární aproximace:** Nahrazení funkce tečnou v daném bodě.
 - **Grafické znázornění:** Načrtnout graf funkce a její tečny v různých bodech.
 - **Výpočet:** Odvodit rovnici tečny.
 - **Polynomiální aproximace:** Nahrazení funkce polynomem vyššího stupně.
 - **Zmínka:** „O polynomiální aproximaci vyšších stupňů se dozvíte více v budoucnu, když se naučíte derivovat.“

- **Příklady:**
 - **Lineární aproximace funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v bodě $x = 4$:**
 - Spočítat hodnotu funkce a její derivace **v bodě 4**.
 - Sestavit rovnici tečny.
 - Vypočítat přibližnou hodnotu $\sqrt{4,1}$ pomocí tečny.
 - Porovnat s přesnou hodnotou pomocí kalkulačky.

3. Interakce se žáky (10 minut)

- **Otázky:**
 - Co je to aproximace?
 - Jaká je chyba aproximace?
 - Jak se vypočítá rovnice tečny v daném bodě?
 - K čemu může být lineární aproximace užitečná?
- **Úkoly:**
 - Rozdělit studenty do skupin a zadat jim úkol, aby našli lineární aproximaci jiné funkce (např. $\sin x$ v bodě $x = 0$).
- **Diskuze:**
 - Po skupinové práci provést krátkou diskusi a nechat studenty prezentovat své výsledky.

4. Závěr (5 minut)

- **Shrnutí:**
 - Zopakovat základní pojmy a metody.
 - Zdůraznit význam aproximace v matematice a dalších oborech.
- **Domácí úkol:**
 - Zadání několika příkladů na procvičení.

5. Zpětná vazba

- **Otázky na konci hodiny:**
 - Čemu jste dnes nejlépe porozuměli?
 - Co vám přišlo nejtěžší?
 - Jaké otázky vám zůstaly nezodpovězeny?

Tabulka klíčových pojmů

Pojem	Vysvětlení
Aproximace	Nahrazení složité funkce jednodušší funkcí.
Chyba aproximace	Rozdíl mezi hodnotou původní funkce a hodnotou přibližné funkce.
Interval aproximace	Úsek, na kterém chceme funkci aproximovat.
Lineární aproximace	Nahrazení funkce tečnou v daném bodě.

Grafické podklady:

- Grafy funkcí a jejich tečen.
- Tabulky s vypočtenými hodnotami.
- **Využití technologií:** Můžete využít počítačové programy (např. GeoGebra) pro dynamickou vizualizaci a výpočty.
- **Další možnosti:**
 - Pokud máte více času, můžete se věnovat i jiným metodám aproximace (např. pomocí Lagrangeových polynomů).
 - Pro nadané studenty můžete připravit náročnější úkoly, například odvození vzorce pro chybu lineární aproximace.

Využití GeoGebry a Excelu

Úlohy pro GeoGebru

1. Lineární aproximace:

- **Zadání:** Zvolte funkci (např. $\sin(x)$, e^x , \sqrt{x}) a bod, ve kterém chcete provést lineární aproximaci.
 - **Postup:**
 - Nakreslete graf funkce.
 - Sestrojte tečnu v daném bodě.
 - Porovnejte hodnoty funkce a tečny v několika blízkých bodech.
 - **Příklad:** Funkce $f(x) = \sin(x)$, bod $x = \frac{\pi}{4}$.
- **Rozšíření:** Změňte bod dotyku a pozorujte, jak se mění přesnost aproximace.

2. Kvadratická aproximace:

- **Zadání:** Zvolte funkci (např. x^3 , $\ln(x+1)$) a bod, ve kterém chcete provést kvadratickou aproximaci.
 - **Postup:**
 - Nakreslete graf funkce.
 - Najděte kvadratický polynom, který má stejnou hodnotu, první a druhou derivaci jako původní funkce v daném bodě.
 - Porovnejte grafy obou funkcí.
 - **Příklad:** Funkce $f(x) = x^3$, bod $x = 1$.

3. Porovnání různých aproximací:

- **Zadání:** Zvolte funkci a bod, ve kterém porovnáte lineární a kvadratickou aproximaci.
 - **Postup:**
 - Nakreslete graf funkce, tečny a paraboly.
 - Vypočítejte chyby aproximace v několika bodech.
 - **Příklad:** Funkce $f(x) = \frac{1}{1+x}$, bod $x = 0$.

Úlohy pro Excel

- **Zadání:** Vytvořte tabulku s hodnotami funkce a jejích aproximací v různých bodech.
 - **Postup:**
 - Vytvořte sloupce pro x , hodnoty funkce, hodnoty lineární aproximace a hodnoty kvadratické aproximace (pokud je známa).
 - Vypočítejte chyby aproximace.
 - Vytvořte graf pro porovnání.
 - **Příklad:** Funkce $f(x) = e^x$, bod $x = 0$.

Konkrétní číselné hodnoty a funkce

- **Lineární aproximace:** $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x , \sqrt{x} , $\frac{1}{x}$ (pro $x \neq 0$)
- **Kvadratická aproximace:** x^3 , x^2 , $\ln(x+1)$, $\frac{1}{1+x}$
- **Body:** 0 , 1 , -1 , $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$

Další nápady

- **Algebraické aproximace vyššího stupně:** Pokud studenti mají znalosti o polynomech vyšších stupňů, mohou se pokusit o aproximaci kubickými nebo kvadratickými polynomy.
- **Numerické metody:** Můžete zmínit, že existují i jiné metody aproximace, jako například metoda nejmenších čtverců, a ukázat jejich základní princip.
- **Aplikace:** Diskutujte o praktických aplikacích aproximace, například ve fyzice, ekonomii nebo počítačové grafice.

Pro ještě větší motivaci studentů můžete navrhnout následující:

- **Soutěž:** Kdo najde nejlepší aproximaci pro danou funkci?
- **Projekt:** Nechte studenty, aby si vybrali vlastní funkci a provedli její aproximaci.
- **Prezentace:** Ať studenti prezentují své výsledky ostatním.

Zhodnocení využití AI:

- nadšení, velká úspora času,
- nutná úprava promptů a korekce námětů v závislosti na znalostech studentů
- výsledný návrh motivující,
- obohacující další přístup k výuce.